

فهرست

■ فصل ۱: جبر و معادله

- ۸ درس ۱: مجموع جملات دنباله‌های ...
- ۱۴ درس ۲: معادلات درجه دوم
- ۲۲ درس ۳: معادلات گویا و گنگ
- ۲۵ درس ۴: قدرمطلق و ویژگی‌های آن
- ۳۱ درس ۵: آشنایی با هندسهٔ تحلیلی

■ فصل ۲: تابع

- ۴۳ درس ۱: آشنایی بیشتر با تابع
- ۴۹ درس ۲: انواع تابع
- ۵۳ درس ۳: وارون یک تابع
- ۵۸ درس ۴: اعمال روی توابع

■ فصل ۳: توابع نمایی و لگاریتمی

- ۷۱ درس ۱: تابع نمایی
- ۷۴ درس ۲: تابع لگاریتمی و لگاریتم
- ۷۸ درس ۳: ویژگی‌های لگاریتم و حل ...

■ فصل ۴: مثلثات

- ۹۳ درس ۱: رادیان
- ۹۷ درس ۲: نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا
- ۱۰۳ درس ۳: توابع مثلثاتی
- ۱۰۸ درس ۴: روابط مثلثاتی مجموع و ...

■ فصل ۵: حد و پیوستگی

- ۱۲۵ درس ۱: مفهوم حد و فرایندهای حدی
- ۱۳۲ درس ۲: حدهای یک‌طرفه ...
- ۱۳۹ درس ۳: قضایای حد
- ۱۴۷ درس ۴: محاسبهٔ حد توابع کسری ...
- ۱۵۵ درس ۵: پیوستگی

■ ضامم

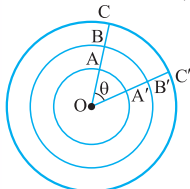
- ۱۶۹ چکیدهٔ نکات حسابان ۱

■ ضامم

- ۱۷۹ کنکورهای نظام جدید

رادیان

می‌دانیم اگر دایره‌ای را به 360° قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت را یک درجه می‌نامند. اگر زاویه‌ای مرکزی (زاویه‌ای که رأس آن روی مرکز دایره باشد) مقابل به 12° تا از این قسمت‌های مساوی باشد، آن گاه آن زاویه را 12° درجه می‌گویند. در دایره‌های هم‌مرکز، اندازه زاویه‌های مرکزی در تمام کمان‌ها برابرند.



در شکل مقابل اگر زاویه مرکزی θ باشد، تمام کمان‌های AA' ، BB' و CC' از نظر درجه، برابر θ هستند، هر چند طول آن‌ها برابر نیستند.

می‌دانیم اگر شعاع دایره‌ای r باشد، محیط آن $2\pi r$ است. حالا اگر بخواهیم طول کمانی که زاویه مرکزی آن بر حسب درجه (θ) است پیدا کنیم، تناسب زیر را در نظر می‌گیریم:

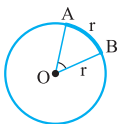
طول کمان زاویه

$$\frac{360^\circ}{\theta} = \frac{2\pi r}{l} \Rightarrow \frac{360^\circ}{\theta} = \frac{2\pi r}{l} \Rightarrow l = \frac{\pi\theta}{180} r$$

در امور فنی زاویه را بر حسب واحد درجه اندازه‌گیری نمی‌کنند، زیرا در ادامه مطالعه ریاضیات (مثلاً محاسبه حد توابع مثلثاتی، مشتق گرفتن، انتگرال‌گیری و ...) بهتر است واحدی به نام رادیان به کار برده شود.

تعریف رادیان

اگر طول کمانی از دایره‌ای به شعاع r ، برابر r باشد، زاویه مرکزی نظیر آن کمان را یک رادیان می‌نامند. در شکل صفحه بعد، اگر طول کمان AB برابر با شعاع



دایره باشد، آن گاه اندازه زاویه مرکزی \widehat{AOB} را یک رادیان می‌نامیم.

یک دایره کامل معادل 2π رادیان است، زیرا محیط دایره $2\pi \times r$ می‌باشد.

رابطه بین رادیان و درجه

می‌دانیم یک دایره کامل معادل 360° یا 2π رادیان است، پس اگر اندازه زاویه‌ای برحسب درجه برابر D و برحسب رادیان برابر R باشد، آن گاه

تناسب زیر را داریم:

$$\frac{360^\circ}{D} = \frac{2\pi}{R} \Rightarrow \frac{360^\circ}{D} = \frac{2\pi}{R} \Rightarrow \frac{180^\circ}{D} = \frac{\pi}{R} \Rightarrow R = \frac{\pi D}{180^\circ}$$

تذکره مهم دیدیم که اگر اندازه زاویه مرکزی از دایره‌ای به شعاع r ، برحسب

درجه، برابر با θ باشد، طول کمان مقابل به آن $\ell = \frac{\pi\theta}{180^\circ} r$ است. اما

درجه، برحسب رادیان برابر $\theta^R = \frac{\pi\theta^\circ}{180^\circ}$ یا $\theta^\circ = \frac{180^\circ\theta^R}{\pi}$ است، پس اگر

برحسب رادیان باشد، طول کمان نظیر آن به صورت مقابل است: $\ell = r\theta$

مثال ۱

طول کمانی از دایره‌ای به شعاع ۹ سانتی‌متر برابر 6π سانتی‌متر است. زاویه مرکزی نظیر این کمان، چند درجه است؟

$$120 \quad (2) \qquad 90 \quad (1)$$

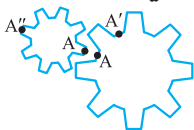
$$60 \quad (4) \qquad 45 \quad (3)$$

پاسخ گزینه ۲

$$\ell = \frac{\pi\theta^\circ}{180^\circ} r \Rightarrow 6\pi = \frac{\pi\theta}{180^\circ} \times 9 \Rightarrow 6\pi = \frac{\pi\theta}{20^\circ} \Rightarrow \theta = \frac{120^\circ\pi}{\pi} = 120^\circ$$

مثال ۲

دو چرخ دنده یکی به شعاع ۱۰ cm و دیگری به شعاع ۲ cm با یکدیگر درگیر هستند. اگر چرخ دنده بزرگ تر به اندازه $\frac{\pi}{5}$ رادیان دوران کند،



چرخ دنده کوچک تر چند رادیان می چرخد؟

$$\pi \quad (۲)$$

$$\frac{2\pi}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{5\pi}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{5\pi}{2} \quad (۳)$$

پاسخ | گزینه ۲ وقتی چرخ دنده بزرگ تر به اندازه $\frac{\pi}{5}$ رادیان

بچرخد، نقطه A به نقطه A' منتقل می شود. طول کمان AA' برابر

$$l = \widehat{AA'} = \theta_1 r_1 = \frac{\pi}{5} \times 10 = 2\pi \text{ cm} \quad \text{است با:}$$

چون دو چرخ دنده درگیر هستند، پس نقطه A روی چرخ دنده کوچک تر نیز باید به اندازه ۲π cm انتقال یابد تا به نقطه A'' برسد، یعنی طول کمان AA'' روی چرخ دنده کوچک تر نیز باید ۲π cm باشد.

$$l = \widehat{AA''} = \theta_2 r_2 \Rightarrow 2\pi = \theta_2 \times 2 \Rightarrow \theta_2 = \pi$$

یعنی چرخ دنده کوچک تر به اندازه π رادیان (نیم دایره) دوران می کند.

تذکره وقتی دو چرخ دنده با هم درگیر باشند (یا دو قرقره که با تسمه ای

به هم وصل شده باشند) شعاع یکی r_۱ و دیگری r_۲ باشد، چنانچه

چرخ دنده اول (قرقره اول) به اندازه θ_۱ و چرخ دنده دوم (قرقره دوم) به

اندازه θ_۲ دوران کند، آن گاه:

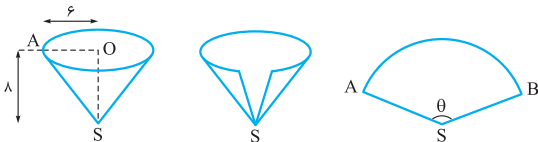
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1}$$

در مثال قبلی اگر از این رابطه استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{10}{2} = \frac{\theta_2}{\frac{\pi}{5}} \Rightarrow 5 = \frac{5\theta_2}{\pi} \Rightarrow \theta_2 = \pi$$

مثال ۲۲

مخروطی قائم به شعاع قاعده $r = 6$ cm و ارتفاع $h = 8$ cm را از روی یک یال جانبی برش می‌دهیم و آن را تسطیح می‌کنیم. (روی یک سطح مسطح می‌گسترانیم). زاویه مرکزی نظیر این قطاع برحسب رادیان چه قدر است؟



پاسخ با توجه به مثلث قائم‌الزاویه AOS در شکل سمت چپ به سادگی معلوم می‌شود $AS = 10$ cm است، پس شعاع قطاع حاصل پس از تسطیح مخروط، برابر با 10 cm است.

طول کمان \widehat{AB} از قطاع SAB برابر محیط قاعده مخروط است.
 \widehat{AB} طول کمان = محیط قاعده = $2\pi r = 2\pi \times 6 = 12\pi$ cm

اکنون داریم:

$$\widehat{AB} \text{ طول کمان} = R\theta \Rightarrow 12\pi = 10\theta \Rightarrow \theta = 12/10\pi$$

مثال ۲۳

طول برف‌پاک‌کن اتومبیلی 30 cm است و کمانی را که طی می‌کند 15° است. طول کمانی که نوک برف‌پاک‌کن می‌پیماید، چند سانتی‌متر است؟ ($\pi = 3/14$)

۷۸/۵ (۴) ۹۶/۵ (۳) ۸۷/۵ (۲) ۶۹/۵ (۱)

پاسخ گزینه ۴ با رابطه $R = \frac{\pi D}{180}$ ، زاویه 15° برابر با $\frac{\pi \times 15^\circ}{180} = \frac{5\pi}{6}$ رادیان است.

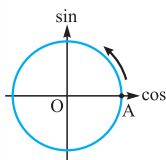
$$\text{طول کمان} = \ell = r\theta = 30 \times \frac{5\pi}{6} = 25\pi = 25 \times 3/14 = 78/5 \text{ cm}$$

نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

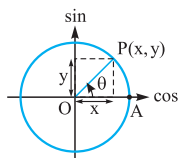
سال گذشته با نسبت‌های مثلثاتی زوایه‌های صفر درجه، 30° ، 45° ، 60° و 90° آشنا شدید که در جدول زیر گنجانده شده‌اند.

زاویه \ نسبت مثلثاتی	0°	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$
	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده
cot	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

عددهای سطر اول که زیر زوایه‌ها نوشته شده‌اند، سینوس زوایه‌ها هستند و اگر ترتیب آن‌ها را برعکس کنیم کسینوس زوایه‌ها به دست می‌آیند.



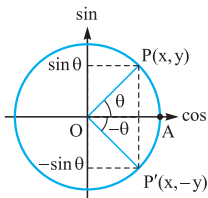
تعریف دایره مثلثاتی: دایره‌ای به شعاع واحد که دارای مبدأ (نقطه A) و جهت مثبتی که پادساعتگرد است دایره مثلثاتی می‌نامند. محور افقی محور کسینوس‌ها و محور عمودی محور سینوس‌ها می‌باشد.



اگر نقطه $P(x, y)$ روی دایره مثلثاتی باشد و زاویه \hat{AOP} برابر θ باشد، آن گاه $x = \cos \theta$ و $y = \sin \theta$.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

با توجه به شکل زیر معلوم می‌شود که $\cos(-\theta) = \cos \theta$ و $\sin(-\theta) = -\sin \theta$. چون $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ و $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ است، پس $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ و $\cot(-\theta) = -\cot \theta$ و به طور کلی عبارتهای زیر را داریم:

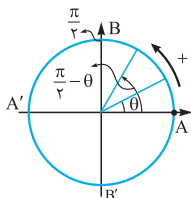


$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\cot(-\theta) = -\cot \theta$$



تذکره مهم توجه داشته باشید که اگر θ حاده باشد، $\frac{\pi}{4} - \theta$ در ربع اول است، زیرا $\frac{\pi}{4}$ یعنی کمان AB (شکل مقابل). چون باید θ از آن کم شود، پس باید در جهت عقربه‌های ساعت (خلاف جهت مثلثاتی) حرکت کنیم و در این صورت در ربع اول قرار می‌گیریم.

ولی $\pi + \theta$ در ربع سوم است، زیرا π یعنی کمان AA' (در جهت

فصل چهارم: مثلثات : درس نامه

مثبت) و باید θ به آن اضافه شود، پس باید در جهت مثلثاتی به اندازه θ پیش برویم که در ربع سوم قرار می‌گیرد. به دلیل مشابه، زاویه $\theta - \frac{3\pi}{4}$ در ربع سوم است، زیرا $\frac{3\pi}{4}$ یعنی کمان ABB' و باید θ از آن کم شود، پس باید در خلاف جهت مثلثاتی برگردیم و در ربع سوم می‌افتد.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $\frac{\pi}{4} \pm \theta$ ، $\frac{3\pi}{4} \pm \theta$ ، $\pi \pm \theta$ و $2\pi \pm \theta$

فرض کنید θ حاده باشد:

الف برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ مراحل زیر را طی می‌کنیم:
گام ۱ اگر کمان شامل $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{3\pi}{4}$ باشد، نسبت‌های مثلثاتی به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$\sin \rightarrow \cos$$

$$\cos \rightarrow \sin$$

$$\tan \rightarrow \cot$$

$$\cot \rightarrow \tan$$

گام ۲ با توجه به ربعی که زاویه در آن قرار دارد، علامت را مشخص می‌کنیم. به عنوان مثال برای محاسبه $\cos(\frac{3\pi}{4} + \theta)$ ، چون $\frac{3\pi}{4} + \theta$ در ربع چهارم است و کسینوس در ربع چهارم مثبت است، حاصل آن مثبت می‌باشد و چون $\frac{3\pi}{4}$ دارد، کسینوس باید به سینوس تبدیل شود، پس $\cos(\frac{3\pi}{4} + \theta) = \sin \theta$.

ب برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی π و 2π مراحل زیر را طی می‌کنیم:
گام ۱۱ اگر کمان شامل π یا 2π باشد، نسبت‌های مثلثاتی تغییر نمی‌کند:

$$\begin{aligned}\sin &\rightarrow \sin \\ \cos &\rightarrow \cos \\ \tan &\rightarrow \tan \\ \cot &\rightarrow \cot\end{aligned}$$

گام ۱۲ با توجه به ربعی که زاویه در آن قرار دارد، علامت را مشخص می‌کنیم. به عنوان مثال برای محاسبه $\sin(\pi + \theta)$ این طور عمل می‌کنیم که چون شامل π است، پس حاصل (بدون در نظر گرفتن علامت) $\sin \theta$ است. ولی زاویه $\pi + \theta$ در ربع سوم است و سینوس در ربع سوم منفی است، پس حاصل نهایی $-\sin \theta$ می‌باشد، در نتیجه $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$.
 از مطالبی که بیان شد نتیجه می‌شود که اگر α و β متمم یکدیگر باشند، یعنی $\alpha + \beta = 90^\circ$ آن‌گاه داریم:

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \cot \beta, \quad \cot \alpha = \tan \beta$$

مثال ۱

حاصل $\sin \frac{7\pi}{6}$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۱) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۲) \quad -\frac{1}{2} \quad (۳) \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۴)$$

پاسخ | گزینه ۳ می‌دانیم $\frac{7\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$ یا $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$ است.

در این جا θ ، برابر $\frac{\pi}{6}$ می‌باشد. $\pi + \frac{\pi}{6}$ در ربع سوم است و در ربع سوم، سینوس منفی است و چون π دارد، نسبت مثلثاتی تغییر

$$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

نمی‌کند، پس:

مثال ۱

حاصل $A = \sin(-\frac{13\pi}{6}) + \tan \frac{7\pi}{4}$ کدام است؟

$$-\frac{3}{2} \quad (4) \quad -\frac{1}{2} \quad (3) \quad \frac{3}{2} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (1)$$

پاسخ | گزینه ۴ می دانیم $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ است، پس:

$$\sin(-\frac{13\pi}{6}) = -\sin \frac{13\pi}{6} = -\sin(2\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

توجه کنید که انتهای کمان $2\pi + \frac{\pi}{6}$ در ربع اول است و سینوس آن مثبت می باشد.

$$\tan \frac{7\pi}{4} = \tan(\frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = \tan(2\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

پس توجه داریم که $2\pi - \frac{\pi}{4}$ در ربع چهارم است و تانژانت در ربع

$$A = -\frac{1}{2} + (-1) = -\frac{3}{2}$$

چهارم، منفی است. پس:

مثال ۲

حاصل $A = \frac{2 \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) + 3 \sin(2\pi - \theta)}$ کدام است؟

$$\frac{3}{4} \cot \theta \quad (4) \quad -\frac{1}{2} \tan \theta \quad (3) \quad -\frac{3}{4} \cot \theta \quad (2) \quad \frac{1}{2} \tan \theta \quad (1)$$

پاسخ | گزینه ۲ واضح است که:

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta \quad , \quad \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = +\cos \theta$$

$$\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\sin \theta \quad , \quad \sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta$$

$$A = \frac{2 \cos \theta - (-\cos \theta)}{-\sin \theta + 3(-\sin \theta)} = \frac{3 \cos \theta}{-4 \sin \theta} = -\frac{3}{4} \cot \theta$$

پس داریم:

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $\theta \pm 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

می‌دانیم 2π یعنی یک دوران کامل حول مرکز دایره، پس $2k\pi$ که برابر با $k(2\pi)$ است یعنی k بار کامل حول مرکز دایره دوران کنیم، بنابراین، انتهای کمان‌های $\theta + 2k\pi$ و θ و نیز انتهای کمان‌های $\theta - 2k\pi$ و $-\theta$ بر هم منطبق هستند و داریم:

$$\begin{aligned}\sin(2k\pi + \theta) &= \sin \theta \\ \cos(2k\pi + \theta) &= \cos \theta \\ \tan(2k\pi + \theta) &= \tan \theta \\ \cot(2k\pi + \theta) &= \cot \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(2k\pi - \theta) &= -\sin \theta \\ \cos(2k\pi - \theta) &= \cos \theta \\ \tan(2k\pi - \theta) &= -\tan \theta \\ \cot(2k\pi - \theta) &= -\cot \theta\end{aligned}$$

و

به بیان ساده‌تر، در تمام نسبت‌های مثلثاتی مضرب‌های زوج π را می‌توان حذف نمود.

مثال ۱

$$M = \sqrt{3} \cot\left(\frac{16\pi}{3}\right) + 2 \cos\left(\frac{22\pi}{3}\right)$$

کدام است؟

$$2 \quad (4) \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (3) \quad \sqrt{3} \quad (2) \quad \text{صفر} \quad (1)$$

پاسخ | گزینه ۴ می‌دانیم:

$$\begin{aligned}\cot\left(\frac{16\pi}{3}\right) &= \cot\left(\frac{15\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cot(\Delta\pi + \frac{\pi}{3}) \\ &= \cot(4\pi + \pi + \frac{\pi}{3}) = \cot(\pi + \frac{\pi}{3}) = +\cot\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

و

$$\cos\left(\frac{22\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{24\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos(8\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$M = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

پس داریم:

فصل چهارم: مثلثات : درس نامه

تذکره توابع سینوس و کسینوس همواره در بازه $[-1, 1]$ هستند؛ یعنی اگر θ زاویه‌ای دلخواه باشد، آن گاه: $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, $-1 \leq \sin \theta \leq 1$

مثال ۱

مقدار θ چند رادیان باشد تا عبارت $A = 2 \sin(\frac{\pi}{3} - \theta) + 1$ بیشترین مقدار ممکن باشد؟

$$\frac{\pi}{2} \quad (1) \quad \frac{\pi}{6} \quad (2) \quad -\frac{\pi}{6} \quad (3) \quad -\frac{\pi}{3} \quad (4)$$

پاسخ | گزینه ۳ بیشترین مقدار سینوس یک زاویه برابر با ۱ است،

پس باید $\sin(\frac{\pi}{3} - \theta) = 1$ باشد تا عبارت مورد نظر بیشترین مقدار

ممکن شود. می‌دانیم $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ است، پس زاویه $\frac{\pi}{3} - \theta$ می‌تواند برابر

$$\frac{\pi}{2} \text{ باشد. } \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi - 3\pi}{6} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

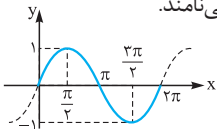
درس

۳

توابع مثلثاتی

تابع سینوس و نمودار آن

اگر $f(x) = \sin x$ باشد، آن گاه با توجه به جدول زیر و رسم چند نقطه از این تابع و به هم وصل کردن این نقاط، نمودار تابع به شکل زیر خواهد بود: البته این شکل به همین فرم و از سمت‌های چپ و راست متناوباً تکرار می‌شود و به همین دلیل آن را موج سینوسی می‌نامند.



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0

